San Francisco, 3. NAVARRETE
www.ecumformacion.com
ecum@ecumformacion.com
649 986 299

Tema I–1: Matrices. Determinantes

1. Matrices

Definición: Llamamos ***matriz*** a una caja de números reales.

Una ***matriz de orden o dimensión*** $n \times m$, es una tabla o caja ordenada de números reales, formada por $n-$ *filas* y $m-$ *columnas* (FILAS $\times$ COLUMNAS)

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$a_{i\,j}$ elemento de la matriz A, está en la *fila* i y *columna* j

⋆ Al conjunto de todas las matrices de dimensión $m \times n$, le designamos por $Mm \times n$

⋆ Al conjunto de todas las matrices de dimensión $n \times n$, le designamos por Mn

Definición: Dos matrices son ***iguales*** si tienen el mismo orden y además coinciden termino a termino.

2. Clasificación

Algunos tipos de matrices que utilizaremos con más frecuencia son:

- ***Matriz Rectangular*** es aquella que tiene distinto el número de filas y de columnas ($n \neq m$).
  - ***Matriz Fila*** — orden $1 \times m$: $A_{1\times m} = (a_{1j}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{pmatrix}$
  - ***Matriz Columna*** — orden $n \times 1$: $A_{n\times 1} = (a_{i1}) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$
- ***Matriz nula*** (0), es decir, $\forall\, i\, j \quad a_{i\,j} = 0 \quad i = 1 \ldots n\,; \quad j = 1 \ldots m.$
- ***Matriz Cuadrada*** Es aquella matriz que tiene igual número de filas que de columnas, como $m = n$, se dice que su orden o dimensión es n, M_n.

  $$A_n = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  En una matriz cuadrada, llamaremos:
  - ***Diagonal Principal*** de A, a los elementos que ocupan el lugar "ii", - fila i y columna i, es decir $a_{i\,i} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$.

- ***Diagonal Secundaria*** de A a los elementos de la forma a_{ij} donde $i+j=n+1$

Una matriz cuadrada, A_n,,

- es una ***Matriz Triangular Sup. o Inf.*** $\forall \quad a_{i\,j}$, situados por debajo (encima) de la diagonal principal son ceros.

$$A_n=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ó } A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- es una ***Matriz diagonal*** si $\forall\, i \quad a_{i\,i}\in\mathbb{R} \quad \text{y } \forall\, i,j \quad a_{ij}=0.$
- es una ***Matriz escalar*** si $\forall\, i \quad a_{i\,i}=a \quad \text{y } \forall\, i,j \quad a_{ij}=0.$
- es una ***Matriz unidad*** si $\forall\, i \quad a_{i\,i}=1 \quad \text{y } \forall\, i,j \quad a_{ij}=0.$

3. Operaciones con matrices

3.1. Matrices cualesquiera $n\times m$, $M_{n\times m}$

- **Suma de matrices:** Sean A y B, dos matrices de orden $n\times m$, $A+B=C$, matriz de orden $n\times m$, tq $\forall\, i\, j \quad c_{i\,j}=a_{i\,j}+b_{i\,j} \quad i=1\ldots n,\ j=1\ldots m$

  Ejercicio: Realiza las siguientes sumas con matrices:

  a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$

  - **Propiedades:**
    - ⋆ **Asociativa** $\forall\, A,B,C\in M_{n\times n} \quad (A+B)+C=A+(B+C)$
    - ⋆ **Conmutativa** $\forall\, A,B\in M_{n\times n} \quad A+B=B+A$
    - ⋆ **Elemento Neutro o matriz nula**, tiene todos sus elementos nulos

      $\forall\, A\in M_{n\times n},\ \exists =\in M_{n\times m}$ tal que $A+0=A$
    - ⋆ **Elemento Opuesto** $\forall\, A\in M_{n\times n} \quad A'\in M_{n\times m}$ tal que $A+A'=0$

      Nota La matriz opuesta de $A=(a_{ij})$ es $A'=(-a_{ij})$

  Ejercicio: Halla la matriz opuesta de $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, A', y comprueba que $A+A'=0$

- **Producto por un escalar:** Sea A una matriz de orden $n\times m$ y $k\in\mathbb{R} \quad k\neq 0$,

  $kA=B$, matriz de orden $n\times m$, tal que $\forall\, i\, j \quad b_{i\,j}=k\,a_{i\,j} \quad i=1\ldots n;\quad j=1\ldots m.$

  Ejercicio: Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, halla $3A$ y $-2A$

  - **Propiedades:**

- ⋆ **Distributiva respecto de la suma de matrices**

  $\forall\, k \in \mathbb{R},\ \forall\, A,\ B \in M_{n\times m} \qquad k(A+B) = kA + kB$

- ⋆ **Distributiva respecto de la suma de escalares**

  $\forall\, k, q \in \mathbb{R},\ \forall\, A, \in M_{n\times m} \qquad (k+q)A = kA + qA$

- ⋆ **Asociativa respecto a los escalares**

  $\forall\, k, q \in \mathbb{R},\ \forall\, A, \in M_{n\times m} \qquad (kq)A = k(qA)$

- ⋆ **Elemento unidad**

  $\forall\, A, \in M_{n\times m}\ \exists\, 1 \in \mathbb{R}$ tal que $1A = A$

- **Producto de matrices:**

Sea A una matriz de orden $n\times p$ y B una matrices de orden $p\times m$, $A\cdot B = C$, matriz de orden $n\times m$ tq $\forall\ i\ j \quad c_{i\,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i\,k}\, b_{k\,j} = a_{i\,1}\, b_{1\,j} + a_{i\,2}\, b_{2\,j} + \ldots + a_{i\,p}\, b_{p\,j}$

Ejemplo: $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \\ 11 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 2} = \begin{pmatrix} -12 & 13 \\ 58 & 65 \\ 86 & 100 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

donde $c_{11} = 1\cdot 4 + 3\cdot 0 + (-1)\cdot 11 + 5\cdot(-1) = -12$ y $c_{32} = 0\cdot 3 + 8\cdot 3 + 8\cdot 9 + 2\cdot 2 = 100$

Ejercicio: Calcula los productos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

- **Propiedades:**

  - ⋆ **Asociativa:** $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

  - ⋆ **Distributiva respecto de la suma:** $A(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

  - ⋆ **Asociativa respecto a la multiplicación por un escalar** $\forall\, k \in \mathbb{R}, \quad k(A\cdot B) = (kA)\cdot B$

  - ⋆ **Elementos neutros:** $A\cdot I = A,\ \ I\cdot A = A$

    (Si $A_{n\times m}$ elemento neutro a izda - I_n - a dcha - I_m).

    Si $A \in M_n$, el **elemento unidad**, se llama **matriz identidad** y tiene los elementos de la diagonal principal "1" y el resto "0".

- **Observaciones sobre el Producto de matrices:**

  - ⋆ **No conmutativa**: $A\cdot B \neq B\cdot A$

    Ejercicio: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, comprobar que $A\cdot B \neq B\cdot A$

$\star$ **Existen divisores de cero.**

Ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, comprobar que $A \cdot B = 0$

3.2. Matrices Cuadradas de Orden n

- **Potencia de A:** $A^k = \overbrace{A \ldots \ldots A}^{k}$

  Observación: Sean A y B, dos matrices cuadradas de orden n:

  ¿$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?, es falso.

  Ejercicio Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, comprobar que $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

  Ejercicio Sean A, $B \in M_n$, efectúa y simplifica las expresiones matriciales:

  a) $(A+B)^2$ **b)** $(A+B)(A-B)$

  c) $A(B+I) - (B+Id)A$ **d)** $A^2 - A(I+A)$

4. Trasposición de una Matriz. Matriz Simétrica y Antisimétrica

Definición: Dada una matriz A, se denomina ***Transpuesta de A***, A^t, a una matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas y las columnas por las filas $A = (a_{ij})$, ***Transpuesta de A*** $= A^t = (a_{ji})$.

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \longrightarrow A^t_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Calcula la matriz traspuesta de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Propiedades

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(k\,A)^t = k\,A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Definición: Una matriz A es ***simétrica*** si $A = A^t$.

Si A_n es simétrica si son iguales los elementos simétricos respecto de la diagonal principal, es decir, será de la forma: $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Definición: Una matriz A es ***antisimétrica*** si $A = -A^t$. Es decir, son matrices cuadradas que tienen opuestos los elementos simétricos respecto de la diagonal principal y nulos los elementos de la diagonal principal.

Si A_n es antisimétrica será de la forma: $A_n = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio: **a)** Escribe una matriz simétrica de orden 3.

b) Escribe una matriz antisimétrica de orden 2.

c) Escribe una matriz antisimétrica de orden 3.

Ejercicio: Sean A, $C \in M_n$, demostrar que

a) $A + A^t$ es simétrica **b)** AA^t es simétrica.

c) Si A es simétrica entonces C^tAC es simétrica.

5. Rango de una Matriz. Calculo del Rango de una Matriz

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, se puede representar por la matriz columna $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ o por la matriz fila $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_m \end{pmatrix}$.

Definición: Se llama ***combinación lineal*** de las filas $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$ a una expresión de la forma $k_1F_1 + k_2F_2 + \ldots + k_nF_n$, donde $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$ son números reales.

Análogamente $k_1C_1 + k_2C_2 + \ldots + k_nC_n$ es una ***combinación lineal*** de las columnas de la matriz A.

Definición: Una fila (o columna) ***depende linealmente*** de otras si se puede escribir como combinación lineal de ellas.

Definición: Si entre las filas (columnas) de una matriz, *alguna depende linealmente* de las otras, se dice que son ***linealmente dependientes***; en caso contrario, son ***linealmente independientes.***

Definición: Se llama ***rango*** de una matriz $\boldsymbol{A}$, rag A, *al* ***número*** de filas o columnas linealmente independientes.

Nota: $rang\ A \leq \text{mín}\ \{n\ de\ filas,\ \ n\ de\ \ columnas\}$

5.1. Obtención del rango de una matriz

⋆ Operaciones Elementales por Filas (Columnas)

Se denominan **operaciones elementales** por filas (columnas) de una matriz a las siguientes:

- **Intercambiar** las filas (columnas) i y j, que indicaremos por $F_i \leftrightarrow F_j$.
- **Multiplicar** la fila (columna) i por un número $k \neq 0$ y sustituirla por el resultado, lo indicaremos $F_i \rightarrow kF_i$.
- **Sumar** las filas (columnas) i, j, multiplicadas por sendos números, y llevar el resultado a la fila i o j. lo indicaremos $F_j \rightarrow kF_i \pm tF_j$.

Las operaciones elementales por filas (columnas) nos permiten estudiar el rango de una matriz y calcula matriz inversas de una dada.

⋆ **Calculo del rango de una matriz**

Método de Gauss, consiste en triangular una matriz, utilizando las operaciones elementales por fila (columna), de manera que sea más fácil determinar el rango que la matriz.

Ejercicio: Halla el rango de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

6. Matriz Inversa. Calculo

Definición: Llamamos ***inversa de A***, A^{-1}, tal que $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I_n$.

Definición: Las matrices A, que tiene inversa se denomina ***regulares***.

Definición: Las matrices A, que no tiene inversa se dice ***singular***.

Ejercicio: Comprobar que la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio: Comprobar que la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

6.1. Calculo de la matriz Inversa

- **Cálculo de la matriz inversa utilizando la definición**

  Escribiremos la inversa utilizando letras, aplicaremos la definición y resolvemos los sistemas que se obtienen, obtendremos los valores de los términos de la inversa de A.

  Ejercicio: Comprobar que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ tiene por inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

- **Método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa de A**

  Para calcular la matriz inversa de una dada, utilizando el método de Gauss, procederemos de la siguiente forma:

  • Ampliamos la matriz A con la identidad $(A|I)$.

  • Operamos con las filas hasta conseguir una matriz escalonada de la forma $(I|B)$, en este caso la matriz B, es la inversa de A.

  • Si operando una de las filas se transforma en ceros, entonces la matriz A, no tienen inversa.

Ejercicio: Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, utilizando el método de Gauss.

Nota: Una matriz cuadrada, tendrá inversa si el rango coincide con el orden de la matriz.

7. Forma Matricial de un Sistemas de Ecuaciones

Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede transformar en una ecuación matricial de la forma, $A\,X = C$, donde $A = (Coeficientes)$, X y C, son dos matrices columnas $X = (Incognitas)$ y $C =$ (terminos independientes)

Ejercicio: Escribe la ecuación matricial del sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 4x + y = 22 \end{cases}$

8. Determinantes

8.1. Determinante de una matriz cuadrada de orden 2 y 3.

Justificación: Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Resolviendo el sistema obtenemos como solución $x = \dfrac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, $y = \dfrac{c_1 a_{11} - c_2 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, el denominador "$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$" es común para los resultados obtenidos de x e y, luego determina la solución del sistema.

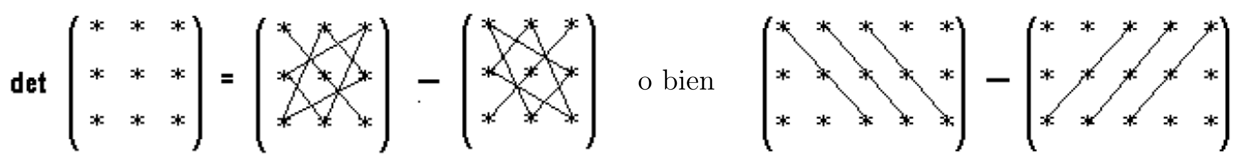
Definición: Sea A una matriz cuadrada de orden 2, llamaremos ***determinante de A:***

$$\det\ A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definición: Sea A una matriz cuadrada de orden 3, llamaremos ***determinante de A:***

$$\det\ A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - \\ {[a_{31}\,a_{22}\,a_{13} + a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{11}\,a_{32}\,a_{23}]} \end{array}$$

Calculo del determinante de una matriz cuadrada de orden 3. Regla de Sarrus



8.2. Determinante de una matriz cuadrada de orden n

Sea $A = (aij)$ una matriz cuadrada de orden n

Definición: Llamamos ***Submatriz Asociada o Matriz Asociada al Elemento*** a_{ij}, a la matriz que resulta de suprimir de la matriz A la fila i y la columna j.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Matriz Asociada de $a_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Definición: Se llama ***Menor Complementario del Elemento*** a_{ij} = al ***determinante*** de la matriz asociada al elemento $a_{ij} = \alpha_{ij}$

Ejemplo: Menor complementario de $a_{32} = \alpha_{32} = \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 21$

San Francisco, 3. NAVARRETE
www.ecumformacion.com
ecum@ecumformacion.com
649 986 299

Definición: Se llama ***Adjunto del Elemento*** $a_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\alpha_{ij}$.

Ejemplo: Adjunto de $a_{32} = A_{32} = (-1)^{3+2}\,\alpha_{32} = -21$

Definición: Sea A una matriz cuadrada de orden n, se llama ***Determinante de A,*** $det(A) = |A|$, a:

$\mathbf{det}\,\boldsymbol{A = a_{i1}\,A_{i1} + a_{i2}\,A_{i2} + \ldots\ldots + a_{in}\,A_{in} = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + \ldots\ldots + a_{1n}\,A_{1n}}$, donde A_{ij} son los adjuntos de los elementos $a_{ij}\quad \forall i\ j$.

Ejemplo: $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^5\,1\det\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^6\,0\det\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} +$
$(-1)^7\,0\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^8\,2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Nota: El valor del determinante es el mismo independientemente de la fila o columna elegida para calcularlo.

8.3. Propiedades

1. $\det\ A = \det\ A^t$

   Ejemplo: $\det A = \det\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\ A^t = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = -38$

2. Si los elementos de una fila o columna son todos nulos, el determinante es cero.

   Ejemplo: $\det\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (-1)^2\,0\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^3\,0\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^4\,0\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

3. Si todos los elementos de una fila o columna se multiplica por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

   Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 7 & 0 \\ 3\cdot 2 & 0 & -1 \\ 3\cdot 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 9 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$
   $(-1)^2\,3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^3\,6\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^4\,9\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$
   $3\left[(-1)^2\,1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^3\,2\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^4\,3\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right] = 3\det\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

4. Si cambiamos el orden de dos filas o columnas en una matriz A, el determinante de A cambia de signo.

   Ejemplo: $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -21 - (68) = -89,$

   $\det A' = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 68 - (-21) = 89$

5. Si dos filas o columnas de una matriz son iguales o proporcionales, el determinante es cero.

Ejemplo: $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4\,[-3+6-(6-3)] = 0$

6. El determinante de una matriz A, no cambia de valor si se sustituye una fila o columna por la que resulta de sumarle una combinación lineal de las otras filas o columnas.

Ejemplo: $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & -6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \det\ B$, donde

$B_3 = A_3 + 2\,A_1 - 2\,A_2$

7. Si los elementos de una fila o columna son suma de dos o más sumandos, el determinante puede descomponerse en una suma de dos o más determinantes donde la fila o columna (donde aparece la suma) está sustituida por los primeros, segundos,... sumandos.

Ejemplo: $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2+4 & 3+2 & -1+5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

8. $\det A\,B = (\det A\,)\,(\det B)$

Método de Chío: consiste en hacer cero el mayor número de elemento de una fila (columna), utilizando las propiedades de los determinantes y posteriormente calcular el determinante de la matriz desarrollando por los elementos de esa fila (columna)

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (1)(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -\,((0+0+3)-(9-24+0)) = -\,(3+15) = -18$$

8.4. Calculo de la Matriz Inversa.

Teorema: Sea A una matriz de orden n. ***Inversa de A*** a la *matriz traspuesta* de los *adjuntos* de los elementos de A dividido por el determinante de A.

$$\boxed{Inv\ A = A^{-1} = \frac{1}{\det\ A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, como $\det\ A = 3 \implies \exists\ A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{\det(A)}$

San Francisco, 3. NAVARRETE
www.ecumformacion.com
ecum@ecumformacion.com
649 986 299

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=6,\quad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0$

$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}5 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-13,\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=7,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2$

$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1,\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$

$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & -13 & -1\\ -3 & 7 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$

8.5. Rango o Característica de una Matriz.

Definición: Sea A una matriz de orden n. Se llama ***Rango o Característica de A*** al máximo orden de sus menores no nulos.

Ejemplo: Calcula el rango de la matriz Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2 & 6\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 1 & 5\\ 3 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix}3 & 5 & -2 & 6\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 1 & 5\\ 3 & 7 & 5 & 3\end{vmatrix}=-18 \Longrightarrow \exists$ un menor de orden 4, no nulo $\Longrightarrow$ *rang* $A=4$

Ejemplo: Determina el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5 & -1 & 8\\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13\end{pmatrix}$

$A_{3\times 5} \Longrightarrow$ rang $A\leq 3$, calculamos $\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 10\end{vmatrix}=(40-15+3)-(10+18-10)=28-18=10\neq 0 \Longrightarrow \exists$ un menor de orden 3 no nulo $\Longrightarrow$ rang $A=3$

Ejemplo: Determina el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$

$A_{3\times 3} \Longrightarrow$ rang $A\leq 3$, calculamos $\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{vmatrix}=(4)-(4)=0 \Longrightarrow$ el único menor de orden 3 es nulo, como $\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0 \Longrightarrow$ rang $A=2$, puesto que $\exists$ un menor de orden 2 no nulo.

Nota: Para que una matriz cuadrada de orden n tenga inversa es necesario y suficiente que el Rang A=Ord A. "**Si Rang *A* = Ord** A. $\Leftrightarrow$ det $A\neq 0$".